AlgarMat 2019

SP.4.7. *Alunos do século XXI! Que matemática? Que metodologias? Que instrumentos?*

Emília Creus — AE Tomás Cabreira, Faro
Verónica Lopes — AE Poeta António Aleixo, Portimão
Paulo Semião — FCT UAlg

Atividade direcionada para o GeoGebra

Módulo A6: Taxa de Variação **Curso Profissional do11º Ano**

Atividade: "Bola no ar"

Uma bola é lançada de baixo para cima. A altura, $f(t)$, em metros, a que a bola se encontra relativamente ao solo, t segundos após o lançamento é dada por: $f(t) = -4t^2 + 16t + 1$.

1. Determina a velocidade média da bola nos intervalos [1; 1,1], [1; 1,01] e [1; 1,001].

2. Na questão anterior foi pedida a velocidade média da bola em intervalos do tipo $[1, 1+h]$, onde h representa um número positivo cada vez mais próximo de zero. Mostra que:

2.1 $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ pode ser uma expressão simplificada para a velocidade média da bola no intervalo $[1, 1+h]$, onde h representa um número real positivo.

2.2 $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ também pode ser uma expressão simplificada para a velocidade média da bola em intervalos do tipo $[1+h, 1]$, onde h representa um número real negativo. (**Nota**: $1+h<1$, visto que $h<0$)

3.

3.1 Utilizando a expressão encontrada em **2.**, preenche a tabela seguinte.

h	-0,1	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01	0,1
$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$							

3.2 Atendendo aos valores obtidos na tabela, conjetura um valor para a expressão $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ quando h tende para zero.

4. Estima o valor da velocidade da bola no instante $t=1$.

Definição: Designamos por taxa de variação da função f em $x=a$, o valor para que tende a taxa média de variação quando a amplitude do intervalo $[a, a+h]$ tende para zero, isto é, o limite da taxa média de variação quando h tende para zero, ou ainda, o limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quando h (positivo ou negativo) tende para zero.
Este valor é também chamado derivada da função f no ponto de abcissa a, designado por $f'(a)$ e abreviadamente representado como $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Emília Creus — AE Tomás Cabreira, Faro
Verónica Lopes — AE Poeta António Aleixo, Portimão
Paulo Semião — FCT UAlg

Atividade direcionada para o GeoGebra

Módulo A6: Taxa de Variação **Curso Profissional do11º Ano**

Na atividade “Bola no ar”, a função $f(x) = -4x^2 + 16x + 1$ relacionava a altura a que a bola se encontrava do solo com o tempo decorrido após o seu lançamento.
Percorre as seguintes etapas recorrendo ao programa de geometria dinâmica GeoGebra
e, de seguida, dá resposta às questões apresentadas.

Etapas:

- **i.** Introduz, no campo “Entrada”, a expressão $f(x) = -4x^2 + 16x + 1$.
- **ii.** Seja A o ponto de abcissa 1 da função f. Marca o ponto A no GeoGebra. Para isso, coloca no campo “Entrada” a expressão "$A = (1, f(1))$".
- **iii.** De seguida, define um seletor, atribui-lhe o nome h e no campo “Incremento” coloca 0,001. Os valores máximo e mínimo do intervalo do selector podem ser, respetivamente, 1 e -1.
- **iv.** Define o ponto genérico B, pertencente ao gráfico da função f e associado ao seletor criado. Para isso, no campo “Entrada” coloca o comando "$B = (1 + h, f(1 + h))$" .
- **v.** Constrói a reta AB recorrendo à ferramenta “Reta definida por dois pontos” .
- **vi.** Utilizando a ferramenta “Tangentes” traça uma reta tangente ao gráfico da função no ponto A.

1. Geometricamente, a taxa média de variação de uma função f no intervalo $[1, 1 + h]$ representa o declive da reta secante ao gráfico da função f, e que passa pelos pontos $A\big(1, f(1)\big)$ e $B\big(1 + h, f(1 + h)\big)$.
Recorrendo ao seletor, determina o declive da reta AB para $h = 0{,}1$; $h = 0{,}01$ e $h = 0{,}001$. Compara os valores obtidos com os valores encontrados na pergunta **3** da **Atividade “Bola no ar”**. O que podes concluir?

2. De que valores se aproxima o declive da reta AB à medida que h tende para zero?

3. Sabe-se que $m_{AB} = t.m.v._{[1,1+h]} = \frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

Por outro lado, como podes constatar graficamente, quando h tende para zero, a reta AB torna-se tangente ao gráfico da função f, no ponto A.
Desta forma, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto A será dado por:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

Relaciona a expressão obtida para o declive da reta com a expressão da taxa de variação.

(Adaptação de uma das Atividades propostas no manual de matemática, Módulo A6, Taxa de Variação da Areal Editores)